BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SESSION 2023

Épreuve de mathématiques

GROUPEMENT B ***CODE : 23MATGRB2***

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉ	COEFFICIENT
Conception et industrialisation en microtechniques	1,5
Électrotechnique	2

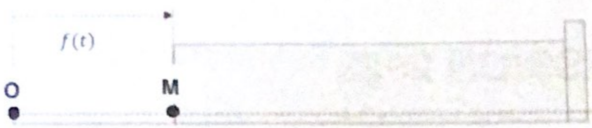
L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

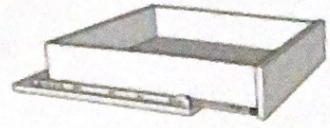
<u>**Document-réponse à rendre avec la copie**</u>

Document-réponse ....page 7/7

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.
Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1/7 à 7/7.

EXERCICE 1 (10 points)





Lorsqu'un tiroir se referme, le fond du tiroir, marqué par le point M, se rapproche du fond du meuble, marqué par le point O (voir croquis ci-dessus).

On note $f(t)$, la distance entre le point O et le point M, à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en centimètre, et t est exprimée en seconde.

L'instant $t = 0$ correspond au moment où l'utilisateur pousse le tiroir pour le fermer.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0) : \ y'' + 5\,y' + 4y = 0 \ ,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et où y' est la dérivée de y, et y'' la dérivée seconde de y.

1. a. Résoudre l'équation : $r^2 + 5r + 4 = 0$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E_0).
On fournit le tableau suivant :

	Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$.	Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$.
$\Delta > 0$	2 solutions réelles distinctes : r_1 et r_2 .	$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.
$\Delta = 0$	1 solution réelle : r_0 .	$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t}$.
$\Delta < 0$	2 solutions complexes conjuguées. $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$	$y(t) = (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))e^{\alpha t}$.

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la situation est la suivante :

- le point M est situé à 20 cm du point O.
- le point M se déplace vers le point O avec une vitesse négative égale à -10 cm·s^{-1}.

a. En déduire la valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

b. On admet que :

$$f(t) = \frac{70}{3}\,e^{-t} - \frac{10}{3}\,e^{-4t} \ .$$

Déterminer la valeur exacte de la distance OM, deux secondes après le début de la fermeture.

c. Le tiroir est dit *fermé* lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm.
Le constructeur affirme que le tiroir est *fermé* en moins de 4 secondes.
A-t-il raison ? Justifier.

Partie B. Étude de fonction.

On considère à nouveau la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t)=\frac{70}{3}\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{10}{3}\mathrm{e}^{-4t}\,.$$

On admet que la fonction f est dérivable et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. On rappelle que $\lim\limits_{u\to+\infty}\mathrm{e}^{-u}=0$. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)$.

b. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ possède une asymptote dont on donnera une équation.

2. a. Déterminer l'expression de $f'(t)$ pour tout t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$.

b. On admet que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ on a $f'(t)<0$.
En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
t←0
p←0,1
s←0,5
Tant que (70/3)*e^(-t) - (10/3)*e^(-4t) > s
        t←t+p
Fin Tant que.
```

a. Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	....	....
ligne numéro 37	3,7	....	....
ligne numéro 38	3,8	....	....

b. Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme ? Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On définit m la position moyenne du tiroir par :

$$m=\frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Démontrer que : $m=\frac{45}{8}-\frac{35}{6}\mathrm{e}^{-4}+\frac{5}{24}\mathrm{e}^{-16}$.

EXERCICE 2 (10 points)

Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.

On considère une fonction f pour laquelle on dispose des informations suivantes :

- f est périodique de période $T = 2\pi$.
- f est paire.
- $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \; ; \; si \; 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \pi - t \; ; \; si \; \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$.

X **1. Sur le document-réponse**, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi \, ; 2\pi]$.

X **2.** Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$b_n = 0 \, .$$

X **3.** On note ω la pulsation associée à la fonction f.
Déterminer ω.

X **4.** Démontrer que $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

X **5.** Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt)\mathrm{d}t \; + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\mathrm{d}t \; .$$

X **6.** On admet que :

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right).$$

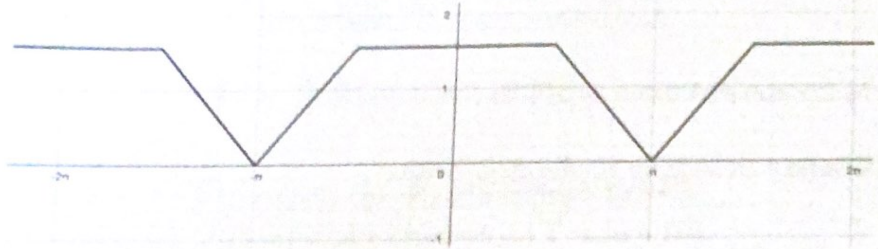
Déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2, et a_3 .

X **7.** En déduire que :

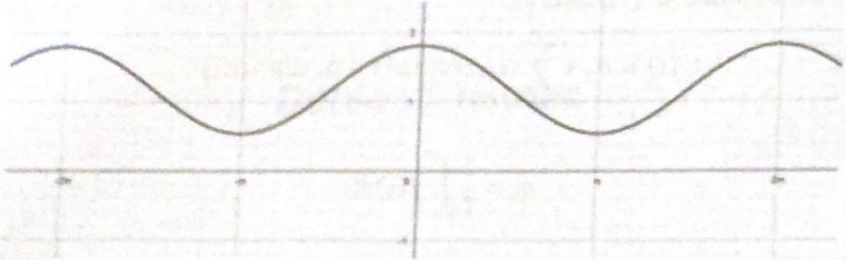
$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t) \, .$$

X **8.** Indiquer, sans justifier, quelle est, parmi les trois courbes ci-après, celle qui est associée à la fonction s_3 .

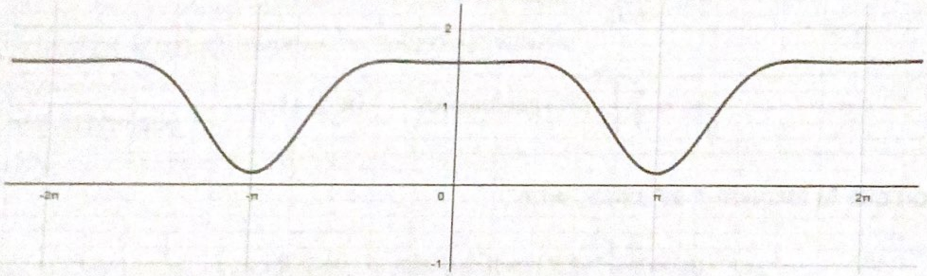
Courbe numéro 1



Courbe numéro 2



Courbe numéro 3



9. a. On note $P = (a_0)^2 + \frac{1}{2}[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$.

Donner une valeur approchée de P à 10^{-4}.

b. On note F la valeur efficace de la fonction f.

On admet que $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$.

On sait que P constitue une approximation de F^2.

On cherche à déterminer le pourcentage d'erreur de cette approximation.

Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification. Une réponse fausse, une réponse multiple, une absence de réponse, ne rapporte ni n'enlève de point.

Le pourcentage d'erreur de cette approximation est égal à :

$0{,}1\%$	1%	10%

Formulaire sur les séries de Fourier.

f est une fonction périodique de période T et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction f :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \ .$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \ .$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \ .$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \qquad (n \geq 1) \ .$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t \qquad (n \geq 1) \ .$$

➔ Lorsque la fonction f est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t \qquad (n \geq 1) \ .$$