Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS MN, veuillez visiter :
btsmn.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS MN

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 (3 pour la spécialité Traitement des matériaux)**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmn.fr/assets/annales/bts-mn/E2 - Mathématiques/2022/BTS MN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot avance initialement à 20 m·s⁻¹ sur un axe horizontal, puis ralentit sous l'action d'un système de freinage. Sa vitesse est étudiée au moyen d'une équation différentielle, d'une fonction exponentielle, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y′ + 0,8y = 0.

Le sujet rappelle que les solutions de l'équation homogène $y\prime + ay = 0$ sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$. On remplace donc le coefficient dans cette formule. Comme aucune condition initiale n'est donnée à cette question, la constante reste quelconque et l'on conserve toute la famille des solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.

1. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g\prime(t) = 0$.
2. En substituant dans le membre de gauche, on obtient $g\prime(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

Cette égalité est vraie pour tout $t \in [0; +\infty[$. Le membre de gauche étant égal au second membre de (E), la fonction proposée est bien une solution de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y\prime + 0,8y = 4$.

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y′ + 0,8y = 4.

La question 1.a donne les solutions de l'équation homogène associée : $y_h(t) = Ce^{-0,8t}$. La question 1.b fournit une solution particulière de (E), la fonction constante $g(t) = 5$. Les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant à cette solution particulière les solutions de l'équation homogène. Cette méthode donne l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t} + 5$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. On part de la solution générale de (E) : $f(t) = Ce^{-0,8t} + 5$.
2. La condition initiale impose $f(0) = C + 5 = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 20 - 5 = 15$.

En reportant cette constante dans la solution générale, on obtient la fonction recherchée. Elle vérifie bien la condition initiale donnée pour la vitesse du chariot à l'instant où le freinage commence.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t), lorsque t tend vers +∞, est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, le terme $15e^{-0,8t}$ tend également vers zéro. La fonction est la somme de ce terme et de la constante 5. Par passage à la limite, sa limite est donc égale à 5, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

1. D'après la question précédente, $f(t)$ tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$.
2. Une limite finie en $+\infty$ signifie que la courbe représentative se rapproche de la droite horizontale de niveau égal à cette limite.

La courbe C admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$, d'ordonnée constante 5. L'équation s'écrit dans le repère du sujet.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. On admet que, pour tout t de [0 ; +∞[, f'(t) = −12e$^{-0,8t}$. Dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f\prime(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et, d'après la limite établie précédemment, $f(t) \to 5$ lorsque $t \to +\infty$. On rassemble ces informations dans le tableau de variation :

t	0	$+\infty$
$f\prime(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout instant $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse reste positive et ne s'annule jamais. Elle tend vers $5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, et non vers zéro. D'après le modèle donné, le freinage ralentit le chariot, mais ne l'arrête pas.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

1. On dérive le terme exponentiel en tenant compte de la dérivée de son exposant, puis on dérive $5t$.
2. Ainsi, $F\prime(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$.

Cette expression est précisément celle de $f(t)$. Par conséquent, $F\prime = f$ sur l'intervalle indiqué, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F\prime(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

Question 4. b. La distance parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Calculer sa valeur exacte entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance entre les instants 0 et 1 est l'intégrale de la vitesse. Avec la primitive F, le théorème fondamental donne $d = F(1) - F(0)$. Le calcul s'écrit :

$$d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}.$$

C'est la valeur exacte en mètres. Son approximation est $15,325081925\ldots$ m ; arrondie au centimètre, elle vaut $15,33$ m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : parmi les expressions proposées, recopier celle qui donne le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le calcul formel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les trois propositions imprimées, il faut donc recopier celle qui réunit ces deux conditions : le polynôme affiché et le reste multiplié par t^2.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

1. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f\prime(0)t$.
2. La condition initiale donne $f(0) = 20$. De plus, $f\prime(0) = -12e^0 = -12$.

En remplaçant la valeur et la pente dans la formule de la tangente, on obtient son équation dans le repère de la courbe C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = -12t + 20$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels

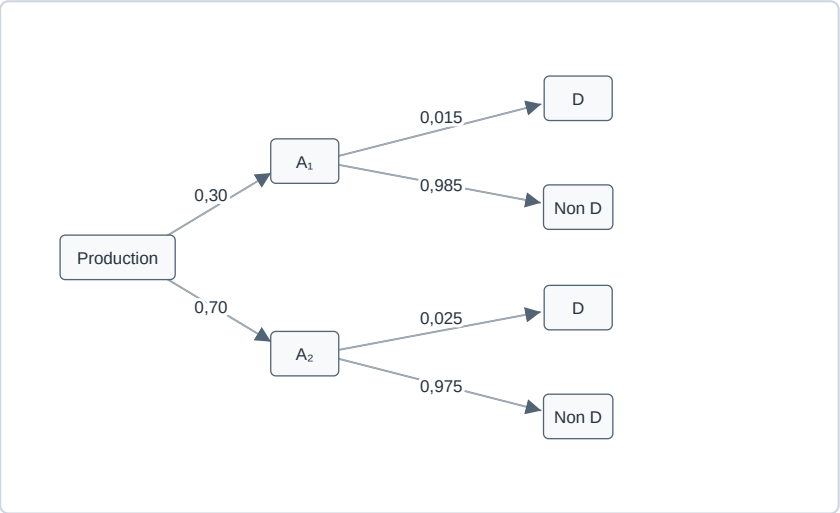
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers et contrôle leur conformité ainsi que leur durée de fonctionnement. Une étude distincte estime la proportion de rivets conformes dans la production à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, avec les proportions de production des deux ateliers et les probabilités qu'un tube présente un défaut selon son atelier d'origine.

On répartit d'abord la production entre les ateliers, puis chaque atelier entre tubes avec défaut et sans défaut. Les probabilités de défaut sont conditionnelles à l'atelier d'origine ; les probabilités de non-défaut complètent chaque branche jusqu'à 1.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Pour chaque atelier, les probabilités conditionnelles des deux issues totalisent 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : $P(A_1) = 0,30$, $P(A_2) = 0,70$; $P(D \mid A_1) = 0,015$, $P(\overline{D} \mid A_1) = 0,985$; $P(D \mid A_2) = 0,025$, $P(\overline{D} \mid A_2) = 0,975$.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité de suivre la branche « atelier 1 », puis la branche « défaut », est le produit de leurs probabilités : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$.

Question 3. Montrer que la probabilité qu'un tube prélevé au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.

Les événements A_1 et A_2 forment une partition de la production. La probabilité d'un défaut est donc la somme des probabilités des deux chemins qui aboutissent à D :

$P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,0045 + 0,0175 = 0,022.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit $2,2\,\%$.

Question 4. Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

Par définition de la probabilité conditionnelle, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{P(A_2 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$. Le numérateur vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$, et le dénominateur vaut $1 - 0,022 = 0,978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825/0,978 \approx 0,698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit environ $69,8\,\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La variable aléatoire T associe à chaque tube fluorescent prélevé sa durée de bon fonctionnement en heures et suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

Le sujet donne $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Avec $\lambda = 0,001$, on obtient $E(T) = \dfrac{1}{0,001} = 1\,000$ heures. Cette valeur est la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes prélevés, et non une durée garantie pour chaque tube.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. Calculer, au centième près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

La formule fournie donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme la loi exponentielle est continue, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9996645$. Arrondie au centième, cette probabilité vaut $1,00$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1,00$ au centième près.

Question 3. Calculer, au centième près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

Pour une loi exponentielle, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Donc $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Arrondie au centième, cette probabilité vaut $0{,}00$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième près.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion est la fréquence observée dans l'échantillon. Ici, $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0{,}975$, soit $97{,}5\,\%$.

Question 2. À l'aide de la formule fournie pour un intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer un intervalle centré sur f pour p. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Avec la formule de l'énoncé, la marge est $1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}975(1-0{,}975)}{1\,000}} \approx 0{,}009677$. Les bornes non arrondies sont donc $0{,}975 - 0{,}009677 \approx 0{,}965323$ et $0{,}975 + 0{,}009677 \approx 0{,}984677$. On arrondit chacune au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, durée deux heures, coefficient 2 (3 pour la spécialité Traitement des matériaux). Les deux exercices de dix points portent sur le freinage d'un chariot et le contrôle de produits industriels. Ils évaluent la modélisation, les équations différentielles, les fonctions, les intégrales, les probabilités, la loi exponentielle et l'estimation par intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, on additionne une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $E(T) = 1/\lambda$.
- La formule des probabilités totales permet de calculer la probabilité d'un événement à partir des branches d'un arbre pondéré.
- L'intervalle de confiance fourni est centré sur f, avec une marge de $1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Placer les probabilités conditionnelles sur les branches correspondant à l'atelier concerné.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier l'événement connu et diviser l'intersection par la probabilité de cet événement.
- Relier le signe de la dérivée aux variations et interpréter la limite de la vitesse dans le contexte du freinage.
- Respecter les arrondis demandés : probabilités au centième, bornes à 10^{-3} près et distance au centimètre.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer une probabilité avec la loi exponentielle ?

Pour une durée T de paramètre λ, utilisez $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour une durée supérieure à t, utilisez $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Effectuez le calcul avec le paramètre et les unités de temps de l'énoncé, puis appliquez l'arrondi demandé.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube sans défaut provienne de l'atelier 2 ?

Il s'agit de $P(A_2 \mid \text{non D})$: divisez $P(A_2 \cap \text{non D})$ par P(non D). Le numérateur se calcule en multipliant la proportion de production de l'atelier 2 par la probabilité qu'un tube de cet atelier soit sans défaut.

Q : Comment répartir le temps et les points pendant l'épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices notés chacun sur 10 points. Aucun temps conseillé par question ni barème détaillé n'est indiqué. Répartissez votre temps entre les deux exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les arrondis.

Q : Quels arrondis et critères de présentation sont demandés ?

Les probabilités des questions de durée de vie sont à arrondir au centième, les bornes de l'intervalle de confiance à 10^{-3} près et la distance au centimètre. Présentez les calculs clairement, avec les unités pour les grandeurs physiques.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmn.fr/assets/annales/bts-mn/E2 - Mathématiques/2022/BTS MN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Mécatronique Navale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.