Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS MN, veuillez visiter :
btsmn.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS MN

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmn.fr/assets/annales/bts-mn/E2 - Mathématiques/2022/BTS MN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m/s avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une équation différentielle, puis étudiée pour analyser son évolution, la distance parcourue et le comportement de sa courbe près de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré, en utilisant la formule fournie.

L'équation homogène est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. D'après la formule fournie, ses solutions sur $[0; +\infty[$ sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par $0,8$, on obtient la solution générale demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Pour g(t) = 5, vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En substituant $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vraie pour tout t, g est bien une solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1. c. Déduire de la question précédente l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E), toute solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée. Ces solutions sont de la forme $ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$. On obtient ainsi l'ensemble des solutions de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale donne $f(0) = 5 + k = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi $k = 15$, ce qui détermine la fonction vitesse du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Pour $t \geq 0$, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Par conséquent, $15e^{-0,8t}$ tend vers 0 et $f(t)$ tend vers 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

Comme $f(t)$ tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$, la courbe C admet une asymptote horizontale d'ordonnée 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. Elle vaut 20 en 0 et tend vers 5 à l'infini.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule jamais : elle diminue et se rapproche de 5 m/s sans atteindre 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m/s}$.

Question 4. a. Pour F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Or cette expression est exactement $f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Question 4. b. En utilisant la formule intégrale donnée pour la distance parcourue, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t = 0 et t = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. La valeur numérique est environ $15,3251$ m ; arrondie au centimètre, elle vaut $15,33$ m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les trois propositions, recopier le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro qui est exact. Aucune justification n'est demandée ; une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le polynôme régulier affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$, soit $20 - 12t + 4,8t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. La proposition correspondante est la troisième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente en 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et, d'après la dérivée fournie, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces valeurs, on obtient l'équation de la tangente demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d’un système électrique

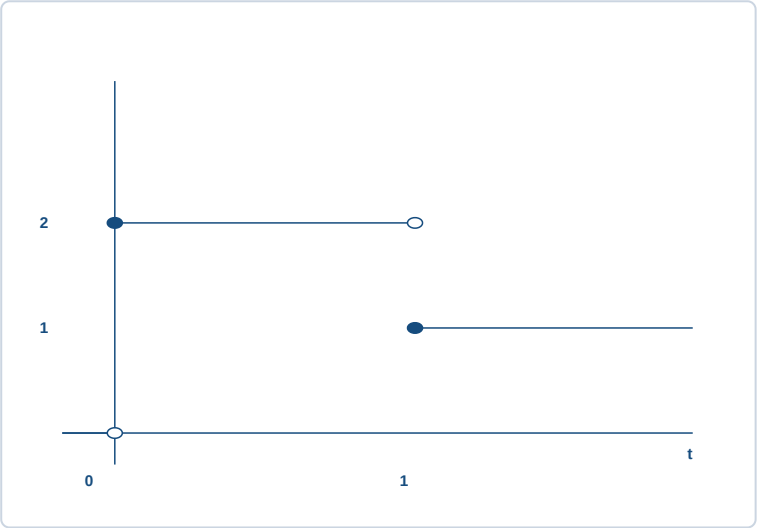
L’exercice porte sur un système électrique entrée-sortie dont l’entrée est construite à partir de fonctions échelon unité et dont la fonction de transfert est donnée. Les transformées de Laplace permettent d’étudier le signal de sortie, de déterminer ses expressions selon le temps et d’en tracer la courbe.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Le signal est nul avant l’instant zéro, puis vaut 2 jusqu’à l’instant 1 exclu. À partir de 1, le second échelon est activé et retranche 1. La définition de l’échelon inclut l’instant d’activation : le point en 0 est donc à la hauteur 2 et celui en 1 à la hauteur 1. Le tracé comporte deux sauts et deux paliers constants.

Signal d’entrée e(t)



Tracé de e(t)=2U(t)-U(t-1), avec les extrémités ouvertes et fermées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée e(t).

Par linéarité, on transforme séparément les deux échelons. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. Le coefficient 2 du premier terme est conservé. En soustrayant la transformée du second échelon, on obtient l’expression de $E(p)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. À partir de la relation S(p) = H(p) × E(p), démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^(-p).

La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$. On utilise $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat précédent $E(p) = (2 - e^{-p})/p$. Le produit se met au dénominateur commun $p(p+1)$, puis la distributivité sépare le terme retardé du terme non retardé.

$$S(p) = \frac{1}{p+1} \times \frac{2 - e^{-p}}{p} = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier la décomposition en éléments simples 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Pour vérifier l'égalité, on réduit les deux termes de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$. On retrouve donc exactement le membre de gauche, pour les valeurs de p où les expressions sont définies.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e^(-p) et de (1/(p + 1))e^(-p).

Le formulaire associe $1/p$ à l'échelon unité et $1/(p+1)$ à l'exponentielle causale $e^{-t}U(t)$. La multiplication par e^{-p} décale ensuite chaque fonction d'une unité : on remplace t par $t-1$ et on multiplie par $U(t-1)$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression du signal de sortie s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition précédente donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Sur $[0;1[$, les termes retardés sont nuls, car leur échelon ne s'active qu'à $t = 1$. Il reste donc l'inverse de $2(1/p - 1/(p+1))$, soit $2(1 - e^{-t})$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5. a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1) et donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

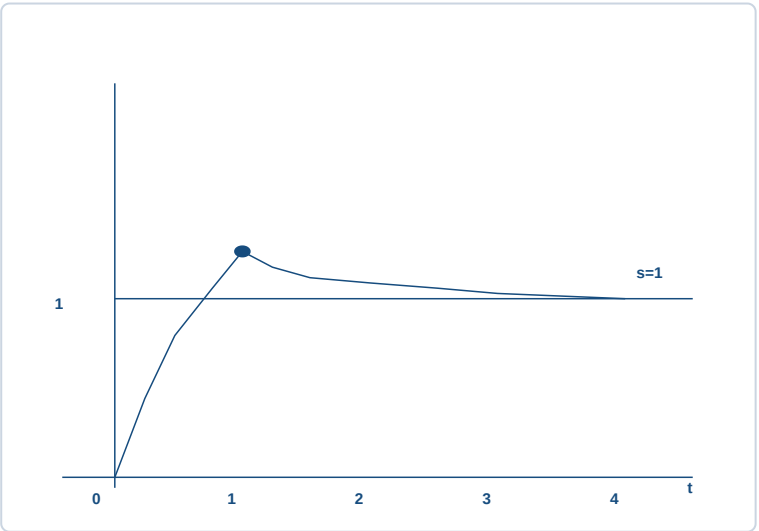
On évalue l'expression valable pour $t \geq 1$ à l'instant $t = 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, cette valeur se simplifie en $2 - 2/e$. Numériquement, elle vaut environ $1{,}264$, donc s'arrondit à $1{,}3$ au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5. b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ croît de 0 jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, l'expression $1 + (e-2)e^{-t}$ décroît vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en 1 : la courbe est continue à cet instant. Elle se rapproche ensuite de l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



Tracé des deux expressions de s(t), avec le point de raccordement et l'asymptote horizontale s=1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0;0)$, atteint $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s=1$.

Question 5. c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, le signal s'écrit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Quand t tend vers $+\infty$, le facteur e^{-t} tend vers zéro. Le terme qui dépend de t disparaît donc et la limite est la constante restante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, en mobilisant équations différentielles, fonctions, intégrales, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = b s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions de l'équation homogène associée.
- Si f(t) tend vers L en +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse : avec une primitive F, elle vaut F(t1) - F(t0).
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap) : le facteur exponentiel traduit un retard de a unités.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du contexte : vitesse en m/s, temps en secondes et distance en mètres.
- Pour un tableau de variation, utiliser le signe de la dérivée et indiquer les valeurs aux bornes ainsi que la limite.
- Avec un facteur e^(-p), appliquer le retard d'une unité et tenir compte de l'échelon U(t - 1).
- Pour les tracés, respecter la définition par intervalles et les valeurs au point de rupture t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de freinage ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez la solution particulière constante indiquée par le sujet. Utilisez ensuite f(0) = 20 pour déterminer la constante et obtenir la fonction vitesse.

Q : Comment traiter un facteur e^(-p) dans une transformée de Laplace inverse ?

Le facteur e^(-p) correspond à un retard d'une unité. Appliquez la propriété de décalage en associant à l'expression retardée l'échelon U(t - 1), puis distinguez les intervalles avant et après t = 1.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les trois parties de l'exercice 1 sont indépendantes. Répartissez le temps entre les questions, les calculs et les tracés à reporter sur le document-réponse, puis gardez quelques minutes pour vérifier les résultats.

Q : Quels éléments faut-il présenter clairement pour répondre aux consignes ?

Justifiez les limites, variations et primitives demandées, et détaillez les étapes des calculs. Donnez les valeurs exactes puis les approximations lorsque le sujet les exige, respectez les unités et réalisez les tracés sur le document-réponse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmn.fr/assets/annales/bts-mn/E2 - Mathématiques/2022/BTS MN - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Mécatronique Navale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.