Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS MN, veuillez visiter :
btsmn.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5**
(Conception et industrialisation en microtechniques) ; 2 (Électrotechnique)

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d’une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmn.fr/assets/annales/bts-mn/E2 - Mathématiques/2023/BTS MN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d’un meuble et celui d’un tiroir est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L’exercice étudie l’équation différentielle du mouvement, puis les variations de f, le seuil de fermeture déterminé par un algorithme et la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Ainsi, $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0.

Les racines de l’équation caractéristique sont réelles et distinctes. D’après le tableau fourni, la solution générale est une combinaison des exponentielles associées aux racines.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale négative de −10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

La distance initiale donne directement la valeur de la fonction en $t = 0$. La vitesse initiale correspond à sa dérivée, avec le signe négatif indiqué.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ − (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l’expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette valeur est la distance OM, en centimètres.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire, en justifiant, si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

La fonction est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Or $f(0) = 20$ cm et $f(4) \approx 0,427$ cm, donc $f(4) < 0,5$ cm : le seuil est franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé en moins de 4 s.

Partie B

Question 1.a. En utilisant la limite de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Lorsque $t \to +\infty$, les exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. Les deux termes de $f(t)$ tendent donc vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

Comme $f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, la courbe admet une asymptote horizontale d'ordonnée 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$: $\left(\frac{70}{3}e^{-t}\right)' = -\frac{70}{3}e^{-t}$ et $\left(-\frac{10}{3}e^{-4t}\right)' = \frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Sur $[0, +\infty[$, on sait que $f'(t) < 0$, donc f est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 0.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	$-$
$f(t)$	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

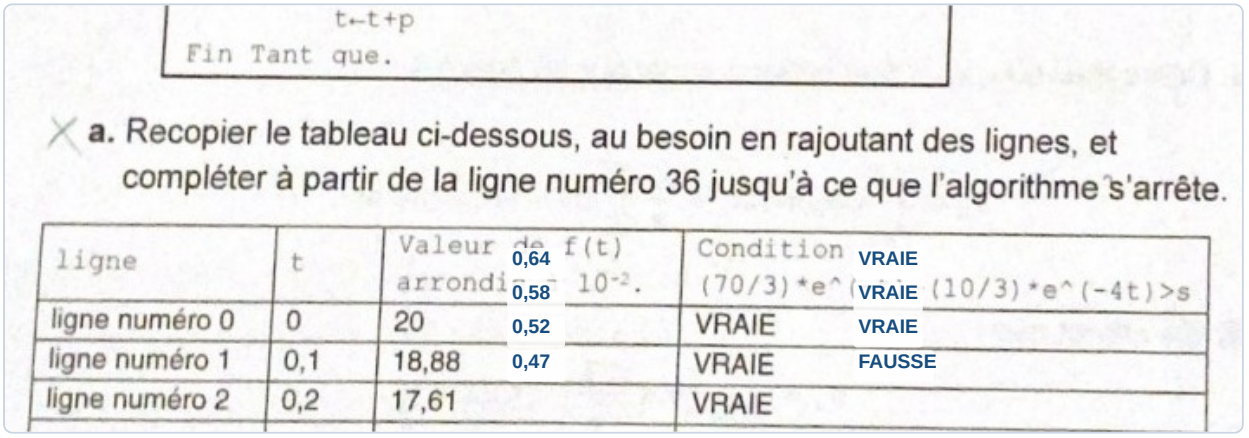
f décroît de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en arrondissant les valeurs de f(t) au centième et en évaluant la condition de la boucle jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque tour, t augmente de 0,1 et la condition teste si $f(t) > 0,5$. Elle est encore vraie à $t = 3,8$, puis devient fausse à $t = 3,9$, ce qui arrête la boucle.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de suivi complété


t←t+p
Fin Tant que.

a. Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

ligne	t	Valeur de f(t) arrondi... 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(...) (10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE

0,64 VRAIE
0,58 VRAIE
0,52 VRAIE
0,47 FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à $t = 3,9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3,8$, la distance est encore supérieure à 0,5 cm. À $t = 3,9$, elle est inférieure à 0,5 cm, la condition devient fausse et la boucle s'arrête.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : le tiroir est fermé, car $f(3,9) < 0,5$ cm.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 − (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{1}{4}\left(\frac{45}{2} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

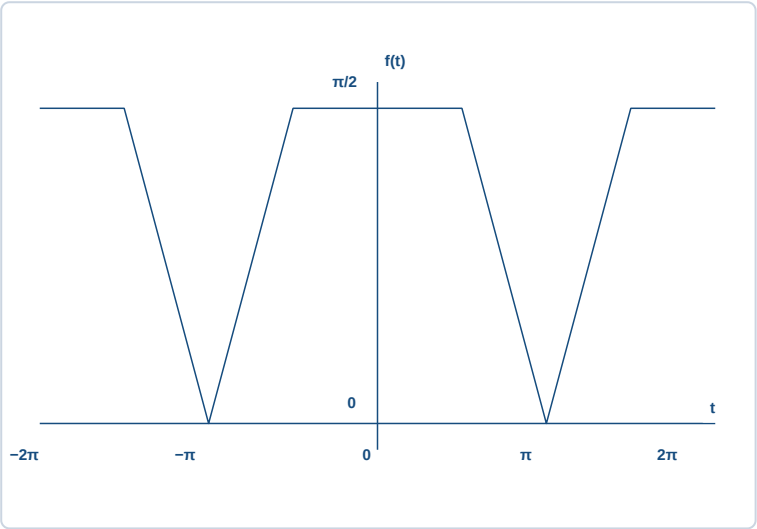
2. Séries de Fourier d'une fonction périodique paire

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur une demi-période. Il demande de tracer la fonction, de calculer ses coefficients de Fourier et sa somme partielle d'ordre 3, puis de comparer une approximation à la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [−2π ; 2π].

Sur une période, la fonction vaut $\pi/2$ de $-\pi/2$ à $\pi/2$. Entre $\pi/2$ et π, elle décroît linéairement de $\pi/2$ à 0. Elle est paire et de période 2π : le tracé se répète donc symétriquement sur $[-2\pi, 2\pi]$, avec des zéros en $-\pi$ et π.

Graphe de f sur [−2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé : plateau à $\pi/2$, rampes linéaires jusqu'aux zéros en $\pm\pi$, puis répétition de période 2π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction f est paire, tandis que $\sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair et son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est nulle. Comme ce produit est de période 2π, son intégrale sur $[0, 2\pi]$ est aussi nulle. La formule de Fourier donne alors $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. On note ω la pulsation associée à f. Déterminer ω.

La période est $T = 2\pi$. La pulsation fondamentale associée à une fonction périodique vaut $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En remplaçant T par sa valeur, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$ rad par unité de temps.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.

Le coefficient moyen est $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. La fonction étant paire et $T = 2\pi$, cela devient $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0, \pi/2]$, $f(t) = \pi/2$; sur $[\pi/2, \pi]$, $f(t) = \pi - t$. Ainsi, l'aire intégrée vaut $\pi^2/4 + \pi^2/8$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)dt$.

Pour $n \geq 1$, le formulaire et la parité donnent $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale aux deux intervalles de définition de f, puis on remplace $f(t)$ par $\pi/2$ et $\pi - t$. Le facteur $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}$ de la première intégrale vaut 1, ce qui donne exactement la formule demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. Sachant que $a_n = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(\frac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On utilise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(\frac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$ et $n = 3$, le premier cosinus vaut 0 et le second -1. Pour $n = 2$, ils valent respectivement -1 et 1. La substitution donne les trois coefficients exacts.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des résultats précédents que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

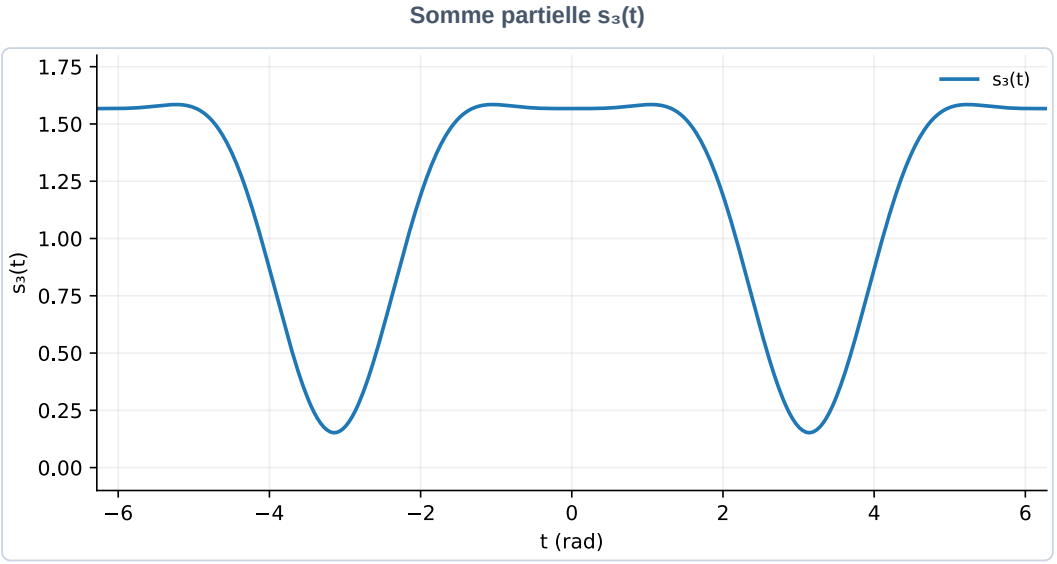
La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients b_n sont nuls. En remplaçant a_0, a_1, a_2, a_3 par leurs valeurs calculées, on obtient l'expression de s_3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La somme s_3 est une combinaison de cosinus : sa courbe est lisse et paire. Sur l'intervalle représenté, elle présente des creux arrondis près de $t = -\pi$ et $t = \pi$, contrairement aux courbes triangulaire ou sinusoïdale proposées. La courbe correspondant à cette forme est la numéro 3.



Courbe lisse et paire, avec des minima arrondis près de t = ±π : courbe numéro 3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour P = (a₀)² + 1/2[(a₁)² + (a₂)² + (a₃)²], donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On substitue les coefficients exacts dans la définition de P : $P = (\frac{3\pi}{8})^2 + \frac{1}{2}[(\frac{2}{\pi})^2 + (-\frac{1}{\pi})^2 + (\frac{2}{9\pi})^2]$. On obtient $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$, puis on arrondit à quatre décimales.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. La valeur efficace F vérifie F² = π²/6 et P constitue une approximation de F². Choisir, parmi 0,1 %, 1 % et 10 %, le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le pourcentage d'erreur relatif est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \pi^2/6 \approx 1{,}6449$, l'erreur vaut environ $0{,}074\%$. Parmi les trois choix, cette valeur correspond à $0{,}1\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle traite de la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et étude de fonction, puis des séries de Fourier d'une fonction périodique paire et d'une approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent la forme de la solution générale.
- Si $f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, la courbe de f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.
- Pour une fonction paire, les coefficients b_n sont nuls et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \Sigma_{n=1}^{3}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance initiale $f(0)$, exprimée en centimètres, de la vitesse $f'(0)$, dont le signe est négatif.
- Dans le tableau algorithmique, incrémenter t de 0,1 et tester la condition à chaque ligne jusqu'à ce qu'elle devienne fausse.
- Ne pas confondre le coefficient constant a_0 avec les coefficients a_n ; utiliser la période T pour déterminer ω.
- Pour l'erreur d'approximation, comparer P à F^2 et recopier une seule option à la question à choix multiples.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la première partie ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale formée de deux exponentielles. Utilisez ensuite $f(0)$ et $f'(0)$ pour déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et la fonction sinus est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur une période symétrique est nulle. Cela entraîne $b_n = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment répartir les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points : l'un sur le tiroir et les fonctions, l'autre sur les séries de Fourier. Répartissez votre temps entre les deux, puis gardez quelques minutes pour vérifier calculs, arrondis, unités et réponses reportées.

Q : Quelles exigences de justification faut-il respecter ?

Présentez les étapes utiles lorsque la consigne demande de résoudre, démontrer, déterminer ou interpréter. Pour la question à choix multiples sur le pourcentage d'erreur, le sujet précise qu'aucune justification n'est demandée et qu'une réponse fausse ne retire pas de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmn.fr/assets/annales/bts-mn/E2 - Mathématiques/2023/BTS MN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Mécatronique Navale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.