Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS MN, veuillez visiter :
btsmn.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée sur les pages fournies**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement de l’eau d’un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle qualité du blé et étude de la farine La Romaine (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmn.fr/assets/annales/bts-mn/E2 - Mathématiques/2023/BTS MN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Refroidissement de l’eau d’un spa

Après l’arrêt du chauffage, la température de l’eau d’un spa, initialement à 38 °C, évolue dans un environnement maintenu à 25 °C. L’exercice modélise cette évolution par une équation différentielle, puis étudie la fonction obtenue et un algorithme de déclenchement d’alarme.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

On réécrit l’équation sous la forme $y' = -0{,}05y$. Pour une équation $y' = ay$, les solutions sont les fonctions $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = -0{,}05$. Cette expression vérifie bien l’équation, car sa dérivée est $-0{,}05Ce^{-0{,}05t}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

1. Posons $y(t) = k$, avec k constant. Alors $y'(t) = 0$ et l’équation différentielle devient $0{,}05k = 1{,}25$.
2. On obtient $k = 1{,}25/0{,}05 = 25$. La fonction constante égale à 25 est donc une solution particulière sur l’intervalle demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l’équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Les solutions de l’équation complète s’obtiennent en ajoutant une solution de l’équation homogène à une solution particulière. La solution particulière constante est 25, et les solutions homogènes sont $Ce^{-0{,}05t}$. Leur somme donne donc toutes les solutions de l’équation $y' + 0{,}05y = 1{,}25$ sur $[0; +\infty[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

D’après la question précédente, $f(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$. La condition initiale donne $f(0) = C + 25 = 38$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 38 - 25 = 13$. En remplaçant cette constante dans l’expression générale, on obtient bien la fonction demandée pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondir la valeur au dixième, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On évalue la fonction à $t = 24$ heures : $f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 \approx 28{,}9155$. Arrondie au dixième, cette température vaut $28{,}9$ °C. Elle correspond à la température prévue par le modèle après 24 heures écoulées depuis la coupure du chauffage.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 24 h, la température de l'eau est d'environ $28{,}9$ °C.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout réel t de [0 ; +∞[.

La dérivée de la constante 25 est nulle. Pour le terme exponentiel, on applique la dérivation d'une composée : $(e^{-0{,}05t})' = -0{,}05e^{-0{,}05t}$. En multipliant par 13, on obtient l'expression de la dérivée de f, valable sur tout l'intervalle $[0; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[, puis dire si ce sens de variation paraît cohérent avec le contexte et argumenter.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0{,}05t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t} < 0$ sur l'intervalle.

- La fonction f est strictement décroissante.
- Ce résultat est cohérent avec le contexte : le chauffage est coupé et l'eau se refroidit dans un environnement à 25 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0{,}05t \to -\infty$, donc $e^{-0{,}05t} \to 0$. Dans l'expression $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$, le terme exponentiel tend alors vers zéro et le terme constant reste égal à 25. La limite est donc la température ambiante du modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25.$

Question 3. b). Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de la limite de f en +∞.

La limite signifie que la température de l'eau se rapproche de 25 °C lorsque le temps écoulé devient très grand. Cette valeur est la température extérieure constante indiquée dans l'énoncé. Le modèle décrit donc un refroidissement vers la température ambiante, sans que l'eau atteigne nécessairement exactement 25 °C en un temps fini.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À long terme, la température de l'eau tend vers la température ambiante, soit 25 °C.

Question 4. a). Une alarme se déclenche lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé avant que l'alarme retentisse, en donnant la valeur exacte puis une valeur arrondie à la minute.

Au seuil, on résout $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, soit $e^{-0{,}05t} = 11/13$. Ainsi, $t = 20\ln(13/11)$ heures. Cette durée vaut environ $3{,}3411$ h, soit $200{,}465$ minutes. L'alarme se déclenche lorsque la température devient strictement inférieure à 36 °C, donc juste après le franchissement du seuil.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Franchissement du seuil : $20\ln(13/11)$ h, soit environ 3 h 20 min à la minute près.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui initialise H à 0 et T à 38 °C, puis augmente H d'une heure et recalcule T tant que T ≥ 34.

La boucle poursuit les calculs tant que $T \geq 34$. Le franchissement du seuil vérifie $13e^{-0{,}05H} + 25 = 34$, d'où $H = 20\ln(13/9) \approx 7{,}3545$ h. À $H = 7$, la température est encore supérieure à 34 °C; à $H = 8$, elle lui est inférieure. La boucle s'arrête donc à $H = 8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme affiche $H = 8$.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme augmente H d'une heure, calcule la température prévue à cette heure, puis répète tant que cette température est au moins égale à 34 °C. Il détermine ainsi la première heure entière à laquelle le modèle prévoit une température strictement inférieure à 34 °C. Cette heure est 8 h.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Il détermine la première heure entière où la température passe sous 34 °C : 8 h.

2. Contrôle qualité du blé et étude de la farine La Romaine

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes fabriquées à partir du blé livré et l'humidité de lots mélangés. L'exercice étudie ensuite le poids des sacs de farine, puis les probabilités liées à l'acceptation d'une nouvelle farine par des artisans boulangers et des boulangers industriels.

Partie A

Question 1. a). À partir des cinq indices d'extensibilité mesurés sur les échantillons de pâte, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La somme des mesures vaut $104 + 81 + 83 + 57 + 55 = 380$, donc $\bar{x} = 380/5 = 76$ mm. Les écarts à la moyenne sont $28, 5, 7, -19, -21$, et la somme de leurs carrés vaut 1660. L'écart-type de la série est donc $\sigma = \sqrt{1660/5} \approx 18,22$ mm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type arrondi au centième : 18,22 mm.

Question 1. b). En considérant que l'écart-type de la série est de 18 mm, vérifier que les cinq valeurs mesurées sont dans l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ] et conclure si le technicien doit tester cinq nouveaux échantillons.

Avec $\bar{x} = 76$ mm et $\sigma = 18$ mm, l'intervalle de contrôle est $[76 - 2 \times 18\ ;\ 76 + 2 \times 18] = [40\ ;\ 112]$ mm. Les cinq mesures, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, sont toutes comprises entre ces bornes. Aucune mesure n'étant en dehors de l'intervalle, le contrôle sur cinq nouveaux échantillons n'est pas déclenché.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les cinq valeurs sont dans $[40; 112]$ mm : aucun test sur cinq nouveaux échantillons n'est nécessaire.

Question 2. À partir des masses et des taux d'humidité des deux camions, montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans un même silo, sachant que le taux d'humidité du mélange doit être inférieur à 13 %.

Camion	Masse de blé	Taux d'humidité
1	29 540 kg	12,4 %
2	14 540 kg	14,1 %

Le taux du mélange est la moyenne pondérée par les masses : $\frac{29540 \times 12,4 + 14540 \times 14,1}{29540 + 14540} \approx 12,961\,\%$. Ce taux est inférieur à 13 %, donc le déchargement des deux camions dans le même silo vide est autorisé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le mélange atteint environ 12,961 % d'humidité, moins que 13 % : le déchargement dans le même silo est autorisé.

Partie B

Question 1. La variable X, correspondant au poids d'un sac de farine, suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un sac prélevé au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On centre et réduit la variable : $Z = \frac{X-25{,}2}{0{,}1}$. Pour $X = 25$, on obtient $z = \frac{25-25{,}2}{0{,}1} = -2$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2)$. La probabilité associée à cette valeur dans la loi normale centrée réduite est environ $0,02275$, soit $0,023$ au millième près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un sac ait une masse inférieure à 25 kg est d'environ 0,023, soit 2,3 %.

Question 2. a). Donner un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égal à 0,95, à 10^{-2} près.

Pour une variable normale, l'intervalle centré sur la moyenne qui contient environ 95 % des valeurs a pour demi-largeur $h \approx 1,96\sigma$. Ici, $\sigma = 0,1$ kg, donc $h \approx 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg. Arrondi au centième, ce réel vaut $0,20$ kg.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Un réel convenable, à 10^{-2} près, est $h = 0,20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique d'une fonction de densité fournie, expliquer pourquoi cette courbe ne peut pas représenter la densité de la variable aléatoire X.

La courbe fournie est centrée en $25,2$ kg, mais elle est très étalée autour de cette valeur. Pour une loi normale d'écart-type $0,1$ kg, environ 95 % des masses doivent être comprises entre $25,2 - 1,96 \times 0,1$ et $25,2 + 1,96 \times 0,1$, soit environ $[25,00\ ;\ 25,40]$ kg. La dispersion représentée sur le graphique est beaucoup plus grande.

✓ RÉPONSE À RETENIR

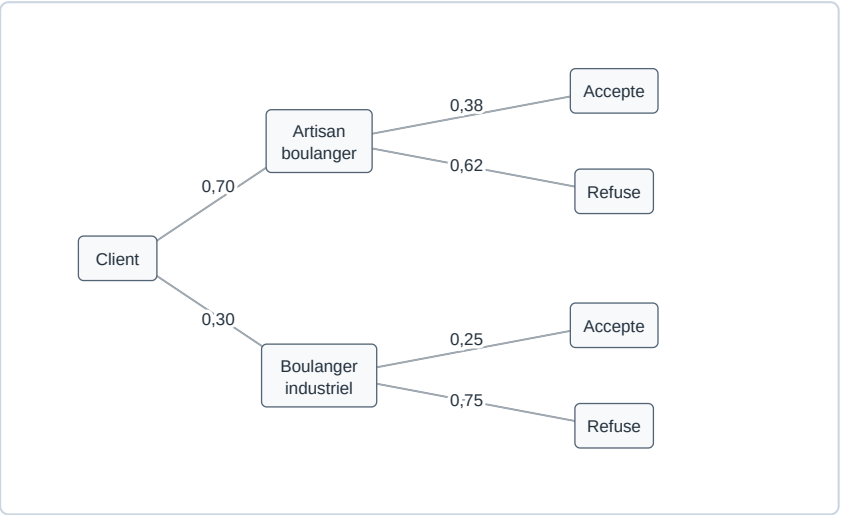
Cette courbe ne peut pas représenter la densité de X : sa dispersion est trop grande pour un écart-type de 0,1 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation décrite par un arbre pondéré, en distinguant les artisans boulangers et les boulangers industriels, puis l'acceptation ou le refus de tester la farine La Romaine.

On note A l'événement « le client est artisan boulanger » et T l'événement « il accepte de tester ». La première bifurcation porte les probabilités $P(A) = 0,70$ et $P(\overline{A}) = 0,30$. Les probabilités d'acceptation sont respectivement $0,38$ pour les artisans et $0,25$ pour les boulangers industriels ; les probabilités de refus complètent chaque branche à 1.

Arbre pondéré : catégorie du client et acceptation



Les probabilités de chaque bifurcation sont celles données dans l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'arbre distingue d'abord les artisans des industriels, puis l'acceptation ou le refus de tester La Romaine.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client choisi soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

L'événement demandé est $A \cap T$: le client est artisan boulanger et accepte de tester la farine. La probabilité de suivre ce chemin dans l'arbre est le produit de la probabilité d'être artisan et de la probabilité conditionnelle d'accepter parmi les artisans : $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,70 \times 0,38$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité qu'un client soit artisan boulanger et accepte le test est $P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Un client qui accepte est soit artisan boulanger, soit boulanger industriel. Ces deux cas sont incompatibles ; on additionne donc les probabilités des deux chemins d'acceptation : $P(T) = 0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,341$. La probabilité demandée est bien égale à la valeur annoncée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un client accepte de tester La Romaine est $P(T) = 0,341$.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer la probabilité qu'il soit un artisan boulanger, arrondie à 10^{-3}.

On cherche la probabilité qu'un client soit artisan sachant qu'il a accepté de tester. Par la formule des probabilités conditionnelles, $P_T(A) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)}$. En utilisant les résultats précédents, $P_T(A) = \frac{0,266}{0,341} \approx 0,78006$, soit $0,780$ au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sachant que le client a testé La Romaine, la probabilité qu'il soit artisan boulanger est $0,780$, au millième près.

Question 4. a). Pour un échantillon de 200 clients, la variable Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au plus 60 clients aient testé la farine La Romaine.

« Au plus 60 » signifie $Y \leq 60$. Pour $Y \sim \mathcal{B}(200 ; 0,341)$, on calcule la somme des probabilités binomiales de 0 à 60 : $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k}$. Cette probabilité, arrondie au millième, vaut environ $0,125$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'au plus 60 clients aient testé la farine est d'environ $0,125$, au millième près.

Question 4. b). Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut $E(Y) = np$. Ici, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Parmi les échantillons de 200 clients, le nombre moyen de clients ayant testé La Romaine est donc de 68,2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$: on s'attend en moyenne à environ 68 clients testeurs par échantillon de 200.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1. La durée et le coefficient ne sont pas indiqués sur les pages fournies. Les exercices portent sur le refroidissement d'un spa et les contrôles d'une minoterie. Ils évaluent la résolution d'une équation différentielle, l'étude d'une fonction, un algorithme, les statistiques, les lois normale et binomiale ainsi que les probabilités conditionnelles.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Dans le modèle du spa, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25 et la température tend vers la température ambiante de 25 °C.
- Pour un mélange, le taux d'humidité global se calcule en pondérant les taux de chaque lot par leurs masses.
- Pour Y suivant une loi binomiale B(n,p), l'espérance vaut E(Y) = np et P(A|T) = P(A ∩ T) / P(T).

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et les arrondis demandés, notamment en kilogrammes, pourcentages, millimètres et durées.
- Pour le contrôle de pâte, vérifier chaque mesure par rapport à l'intervalle imposé, et pas seulement la valeur extrême.
- Pour l'humidité du mélange, pondérer chaque taux par la masse du chargement correspondant.
- Distinguer probabilité conjointe et probabilité conditionnelle, et inscrire les probabilités conditionnelles sur les branches de l'arbre.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de refroidissement ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on cherche une solution particulière constante. On additionne ces solutions pour obtenir la forme générale, puis la condition f(0) = 38 permet de déterminer la constante.

Q : Comment calculer l'humidité du blé après le mélange des deux chargements ?

Multipliez la masse de chaque chargement par son taux d'humidité pour obtenir la masse d'eau correspondante. Additionnez ces masses d'eau, puis divisez par la masse totale de blé et exprimez le résultat en pourcentage.

Q : Comment reconnaître le modèle binomial utilisé pour les 200 clients ?

Y compte les clients ayant testé la farine dans 200 choix assimilés à des tirages indépendants, avec une probabilité constante de 0,341. Y suit donc B(200 ; 0,341), et « au plus 60 » correspond aux valeurs de 0 à 60 incluses.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un client ayant testé la farine soit artisan boulanger ?

Il faut diviser la probabilité d'être artisan et d'avoir testé la farine par la probabilité totale d'avoir testé la farine. Autrement dit, P(A|T) = P(A ∩ T) / P(T).

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmn.fr/assets/annales/bts-mn/E2 - Mathématiques/2023/BTS MN - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Mécatronique Navale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.